

# Cebirsel Eğriler Kullanarak İmge Tabanlı Görsel Geri Beslemeli Denetim

*Ahmet Yasin Yazıcıoğlu, Berk Çallı, Mustafa Ünel*

Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi  
Mekatronik Programı  
Sabancı Üniversitesi, İstanbul

{ahmetyasin,berkc}@su.sabanciuniv.edu  
munel@sabanciuniv.edu

## Özetçe

Görsel geri beslemeli denetim yaklaşımları, kontrol formülasyonlarında genellikle çeşitli imge öznitelikleri (noktalar, doğrular, momentler vb.) kullanır. Bu bildiri, görsel geri beslemeli denetimde nesnelere sınır bilgisinin kullanıldığı yeni bir yöntem sunmaktadır. Nesne sınırları cebirsel eğrilerle modellenmekte ve bu eğriler sonlu sayıda doğrunun çarpımlarının toplamı olarak tek bir biçimde (unique) ayrıştırılmaktadır. Bu bildiriye, bu doğruların kesişimlerinden elde edilen reel noktalar görsel geri beslemeli denetimde kullanılmıştır. Önerilen yöntem Matlab Robotics Toolbox ortamında kullanılarak 6 serbestlik dereceli Puma 560 robotu üzerinde nesne hizalama benzetimleri gerçekleştirilmiş ve oldukça başarılı sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca, iki serbestlik dereceli doğrudan tahrikli SCARA robot kullanılarak deneysel çalışmalar gerçekleştirilmiştir. Benzetimler ve deneysel sonuçlar oldukça ümit verici olup önerdiğimiz yöntemin iyi bir potansiyeli olduğunu göstermektedir.

## Abstract

Visual servoing schemes generally employ various image features (points, lines, moments etc.) in their control formulation. This paper presents a novel method which uses object boundary information in visual servoing. Object boundaries are modeled by algebraic equations and decomposed as a unique sum of product of lines. In this paper, intersection of these lines are used as point features in visual servoing. Simulations are performed with a 6 DOF Puma 560 robot using Matlab Robotics Toolbox for the alignment of a free-form object and successful results are obtained. Experiments are also realized with a 2 DOF SCARA direct drive robot. Both simulation and experimental results are quite promising and show potential of our new method.

## 1. Giriş

Görsel geri beslemeli denetimin robotik sistemlerde kullanılması yakın zamanda istikrarlı bir gelişme sergilemiştir. Piyasada rahatlıkla bulunabilen kameralar ile, dinamik çevresel koşullardaki birçok robotik uygulama için ucuz ve güçlü çözümler üretilebilmektedir. Bu nedenle, bilgisayarlı görme,

robotik ve denetim disiplinlerinde çalışan birçok araştırmacı, görsel geri beslemeli denetimin değişik problemleri üzerinde çalışmaktadır. Bu alandaki bir problem nesne hizalamadır. Görsel geri beslemeli denetim uygulamalarında hizalama yöntemleri, genellikle geometri ve dokusu belirgin öznitelikler taşıyan ve üç boyutlu modelleri bilinen endüstriyel parçalar için tasarlanmıştır. Bu uygulamalarda genellikle görsel çıkarılması ve takibi gerçek zamanda mümkün olan öznitelikler kullanılmaktadır [1]. Literatürde, hizalama için noktalar, doğrular, imge momentleri vb. kullanan çeşitli yöntemler mevcuttur [2]-[5]. Ancak, serbest şekilli düzlemsel nesnelere görüntü tabanlı hizalanması, bu şekillerin bahsedilen öznitelikleri barındırmamasından dolayı zorluk teşkil eder. Bu özniteliklerin kullanımı yerine, bu tip serbest şekilli nesnelere eğriler oturtulabilir [6], [7]. Ancak, bu eğrilerden öznitelik elde etmek kolay bir iş değildir.

Bu bildiriye, düzlemsel kapalı eğrilerin örtük polinom gösteriminin kalibre edilmiş imge tabanlı görsel geri beslemeli denetimde kullanılması önerilmektedir [3]. Önerilen yöntemde hedef nesnenin sınırlarının örtük polinom gösterimi, eğri oturtma yöntemi ile elde edilmektedir. Elde edilen cebirsel eğri sonlu sayıda doğrunun çarpımlarının toplamı olarak ayrıştırılmıştır [8]. Bu doğruların kesişim noktaları öznitelik olarak görsel geri beslemeli denetimde kullanılmaktadır.

Bildirinin geri kalan kısmı şu şekilde organize edilmiştir: İkinci bölümde eğrilerin örtük polinom gösterimi ve bu gösterimin nasıl doğru çarpımlarının toplamı olarak ifade edildiği anlatılmaktadır. Üçüncü bölümde kalibre edilmiş kameralar için, imge tabanlı görsel geri beslemeli denetim özetlenmektedir. Dördüncü bölümde 6 serbestlik dereceli Puma 560 robot ile yapılan benzetimler sunulmaktadır. Beşinci bölümde eğri hizalama uygulamasının deneysel sonuçları verilmekte ve tartışılmaktadır. Altıncı bölümde ise bazı önemli noktalar üzerinde durularak bildiri sonlandırılmıştır.

## 2. Düzlemsel Eğrilerin Örtük Polinomlarla Gösterimi

Cebirsel eğriler ve yüzeyler mühendisliğin birçok alanında uzun süredir kullanılmaktadır. Son yirmi yılda, model tabanlı uygulamalarda çok yararlı oldukları kanıtlanmıştır. Bilgisayarlı görme alanında eğrilerin örtük modellerinden çeşitli cebirsel ve geometrik bağımsızlar (invariants) elde etmek



Şekil 1: Bazı örnek şekiller ve bu şekillerin eğri oturtma algoritması [7] ile elde edilen dış hat eğrileri.

üzerine yoğun olarak çalışılmıştır. Bu çalışmalar özellikle şekil izleme, çoklu imgelerden üç boyutlu yüzey tahmini, tek adımda poz tahmini, büyük resim veritabanlarında verimli geometrik kataloglama üzerine yoğunlaşmıştır [9]-[12]. Cebirsel eğriler  $f(x, y) = 0$  şeklindeki örtük denklemler ile tanımlanır. Genel olarak  $n$ 'inci dereceden bir cebirsel eğri şu şekilde ifade edilebilir:

$$f_n(x, y) = \underbrace{a_{00}}_{h_0} + \underbrace{a_{10}x + a_{01}y}_{h_1} + \underbrace{a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2}_{h_2} + \dots$$

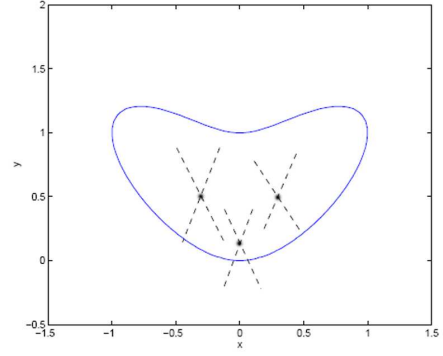
$$\underbrace{a_{n0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + \dots + a_{0n}y^n}_{h_n} = \sum_{i=0}^n h_i(x, y) = 0 \quad (1)$$

Bu denklemde, her  $h_r(x, y)$   $r$  dereceli homojen (bütün terimlerinin derecesi  $r$  olan) bir polinomdur. Bu denklem, sıfır kümesi (zero set) değişmeksizin sıfırdan farklı bir sabit ile çarpılabileceği için monik ( $a_{n0} = 1$ ) hale getirilebilir. Bu çalışmada monik eğriler üzerinde çalışılacaktır.

Örtük polinomların asimptotları en yüksek dereceli terimler tarafından belirlenir. Dolayısıyla reel katsayılı tek dereceli ( $n = 2k + 1$ ) eğriler en az bir reel asimptot barındırır ve açıktırlar. Öte yandan, çift dereceli ( $n = 2k$ ) eğriler kompleks ya da reel asimptotların varlığına bağlı olarak, kapalı veya açık olabilirler. Buna bağlı olarak, kapalı nesne sınırları sadece çift dereceli örtük polinomlar ile gösterilebilir. Bu çift dereceli polinomlar eğri oturtma yöntemleri ile elde edilebilir. Eğri oturtma yöntemi [7] ile elde edilmiş bazı sonuçlar Şekil 1'de verilmiştir.

Örtük bir polinom eğri oturtma yöntemi ile elde edildikten sonra görsel geri beslemeli denetime öznitelik sağlamak amacı ile doğru çarpımlarının toplamı olarak ayrıştırılabilir [8].

**Teorem 1** Herhangi bir dejenere olmayan monik polinom,  $f_n(x, y)$ , kompleks ya da reel doğru çarpanları cinsinden tek bir biçimde (unique) şu şekilde ayrıştırılabilir [13, 14]:



Şekil 2: Dördüncü dereceden bir örtük polinom ve bu polinomun ayrıştırılmasından elde edilen kompleks eşlenik üç doğru çifti

$$f_n(x, y) = \Pi_n(x, y) + \gamma_{n-2}[\Pi_{n-2}(x, y) + \gamma_{n-4}[\Pi_{n-4}(x, y) + \dots]] \quad (2)$$

Burada  $\Pi_j(x, y)$ ,  $j$  tane doğru çarpanının çarpımı olarak şu şekilde verilmektedir:

$$\Pi_j(x, y) = \prod_{i=1}^j [x + l_{j,i} + k_{j,i}] \quad (3)$$

$\gamma_j$  ise ayrıştırılmadaki sabitleri göstermektedir.

Örnek olarak, bu bölümde belirtilen ayrıştırma yöntemi kullanılarak, ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden eğriler aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$f_2(x, y) = L_1(x, y)L_2(x, y) + \gamma_0 = 0$$

$$f_3(x, y) = L_1(x, y)L_2(x, y)L_3(x, y) + \gamma_1 L_4(x, y) = 0$$

$$f_4(x, y) = L_1(x, y)L_2(x, y)L_3(x, y)L_4(x, y) + \gamma_2 L_5(x, y)L_6(x, y) + \gamma_2 \gamma_0 = 0 \quad (4)$$

Bu ayrıştırma, dejenere olmayan örtük polinomlar için tek bir biçimde yapılabilmektedir. Örneğin  $f_4(x, y)$ ,  $L_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$  şeklindeki altı doğru çarpanı ve iki sayısal parametre,  $\gamma_2$  ve  $\gamma_0$ , ile tam olarak ifade edilebilir. Dolayısıyla bu ayrıştırma yöntemi eğrileri temsil edecek gürbüz öznitelikler çıkarmada kullanılabilir ve bu bildiride bu özniteliklerin görsel geri beslemeli denetim amaçlı kullanımı önerilmektedir. Kapalı eğrinin ayrıştırılmasından elde edilen ilk  $n$  doğru kompleks eşlenik çiftler halinde olacaktır. Geri kalan doğrular ise kompleks ya da reel olabilir. Kompleks eşlenik iki doğrunun kesişim noktası reel bir nokta olup, bu doğruların çarpımından elde edilen dejenere koniğin merkezidir [14]. Dolayısıyla, bu  $n$  eşlenik doğru imge düzleminde  $n/2$  reel kesişim noktası meydana getirmektedir. Bu yöntemi görsel geri beslemeli kullanmanın bir yolu, kompleks eşlenik doğru çiftlerinin reel kesişim noktalarının imge öznitelikleri olarak kullanılmasıdır. Dördüncü dereceden örtük bir polinom ve bu polinomun ayrıştırılmasıyla elde edilen kompleks doğru çiftleri Şekil 2'de verilmiştir. Bu şekilde kompleks eşlenik doğruların kesiştirilmesiyle elde edilen noktalar da gösterilmektedir. Bu bildiride, bahsedilen noktaların görsel geri beslemeli denetimde kullanımı üzerine odaklanılmıştır. Diğer alternatif yöntemler ise sonuçlar bölümünde tartışılmıştır.

### 3. İmge Tabanlı Görsel Geri Beslemeli Denetim

$s \in \mathcal{R}^k$  and  $r \in \mathcal{R}^6$  sırasıyla, görüntü algılayıcıdan elde edilen görsel öznitelik vektörünü ve robot elinin duruşunu ifade etmektedir.  $s$  vektörü  $r$ 'nin bir fonksiyonudur ve bu iki vektörün zamana göre türevleri imge Jakobyan'ı  $J_I(r) = \partial s / \partial r \in \mathcal{R}^{k \times 6}$  ile aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\dot{s} = J_I(r)\dot{r} \quad (5)$$

Kameranın sabit olduğu bir sistemde tek bir nokta özniteliği için imge Jakobyan'ı şu şekilde verilir.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/Z & 0 & -x/Z & -xy & (1+x^2) & -y \\ 0 & 1/Z & -y/Z & -(1+y^2) & xy & x \end{bmatrix}}_{J_{xy}} V_c \quad (6)$$

Burada,

$$x = \frac{x_p - x_c}{f_x}, y = \frac{y_p - y_c}{f_y}, \quad (7)$$

$(x_p, y_p)$  imge noktasının piksel koordinatları,  $(x_c, y_c)$  imge merkezinin koordinatları ve  $(f_x, f_y)$  kameranın efektif odak uzaklıklarıdır. Denklem (7)'nin düzenlenip türevlenmesi ve matris şeklinde yazılmasından

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & 0 \\ 0 & f_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_x & 0 \\ 0 & f_y \end{bmatrix}}_{J_I} J_{xy} V_c \quad (8)$$

elde edilir. Burada  $J_I$  imge Jakobyan'ıdır.

Gözden-ele (eye-to-hand) durumunda denklem (5)'teki  $\dot{r} = V_c$  robot elinin hız vektörüdür. Bu hız vektörü kamera çerçevesinde tanımlıdır ve robot denetim çerçevesinde ifade edilmelidir.  $V_R$  robot denetim çerçevesinde robot eli hız vektörünü ifade ederse, bu dönüşüm

$$V_c = T V_R \quad (9)$$

olarak verilebilir. Robottan kameraya hız dönüşüm matrisi  $T \in \mathcal{R}^{6 \times 6}$  aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$T = \begin{bmatrix} R & [t]_x R \\ 0_3 & R \end{bmatrix} \quad (10)$$

Bu tanımlamada  $[R, t]$  kamera çerçevesini robot denetim çerçevesine dönüştüren dönme matrisi ve öteleme vektörüdür.  $[t]_x$  ise  $t$  vektörü ile ilişkilendirilmiş ters bakışlı (skew symmetric) bir matristir. Denklem (9) ve (5) birlikte değerlendirildiğinde

$$\dot{s} = \underbrace{J_I T}_{\triangleq \bar{J}_I} V_R = \bar{J}_I V_R \quad (11)$$

ifadesi elde edilebilir. Yeni imge Jakobyan matrisi  $\bar{J}_I$  imge özniteliklerindeki değişim ile robot denetim çerçevesindeki robot elinin hızı arasındaki ilişkiyi tanımlar.  $p$  tane nokta özniteliği  $s = [x_1, y_1, \dots, x_p, y_p]^T$  şeklinde tanımlandığında her bir noktaya karşı gelen Jakobyan matrisleri aşağıdaki gibi alt alta dizilir.

$$\bar{J}_I = \begin{bmatrix} \bar{J}_I^1 \\ \vdots \\ \bar{J}_I^p \end{bmatrix} \quad (12)$$

Sabit referans öznitelik vektörü  $s^*$  ile gösterildiğinde, hata  $e = s - s^*$  olarak tanımlanır. Görsel geri beslemeli denetim problemi robot elinin hız vektörü  $V_R$ 'yi bu hata sıfıra gidecek şekilde tasarlamaktır.

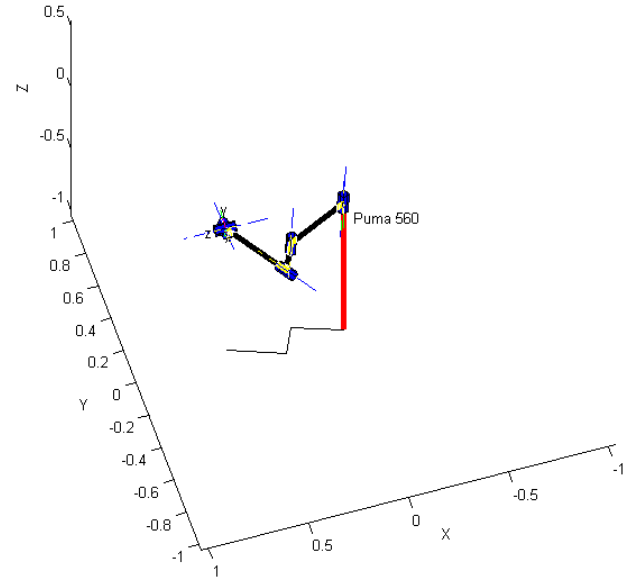
Sistem  $\dot{e} = -\Lambda e$  olacak şekilde ayarlanarak, hata fonksiyonunun üstel olarak azalması sağlanmıştır. Bunu sağlayan hız vektörü şu şekilde elde edilir:

$$V_R = -\bar{J}_I^\dagger \Lambda (s - s^*) \quad (13)$$

Bu denklemde  $\bar{J}_I^\dagger$  imge Jakobyan'ının genel tersini (pseudo-inverse) ifade etmektedir.  $V_R$  ise  $V_R = [V_x, V_y, V_z, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z]^T$  olarak tanımlanmıştır.

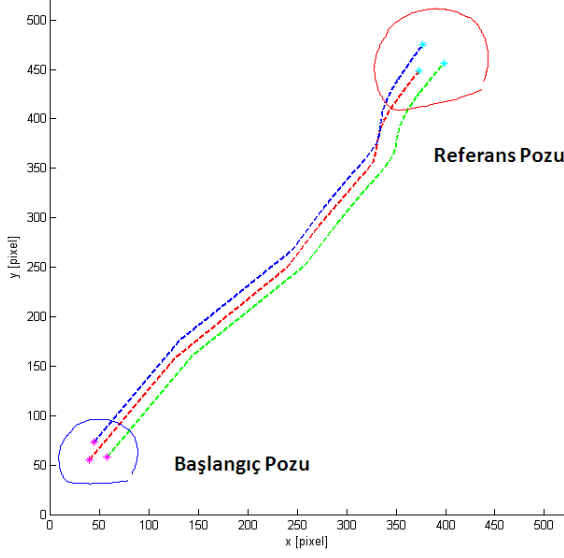
### 4. Benzetim Sonuçları

Önerdiğimiz yöntemin performansını test etmek amacı ile 6 serbestlik dereceli Puma 560 robot (Şekil 3) üzerinde benzetimler yapılmıştır. Bu benzetimlerde Matlab Robotics Toolbox [15] kullanılmıştır. Bu benzetimlerde kamera elde (eye-in-hand) konfigürasyonu söz konusudur. Düzlemsel serbest şekilli bir nesne kameranın görüş alanında olacak şekilde dünya koordinatlarında tanımlanmış ve bu nesnenin referans ile başlangıç pozisyonu arasında kamera çerçevesine göre,  $x$ ,  $y$  ve  $z$  yönlerinde ötelemeler ve dönmeler verilmiştir. Böylelikle önerilen yöntemin 6 serbestlik derecesindeki performansı değerlendirilmiştir. Yapılan benzetimde hedef nesnenin

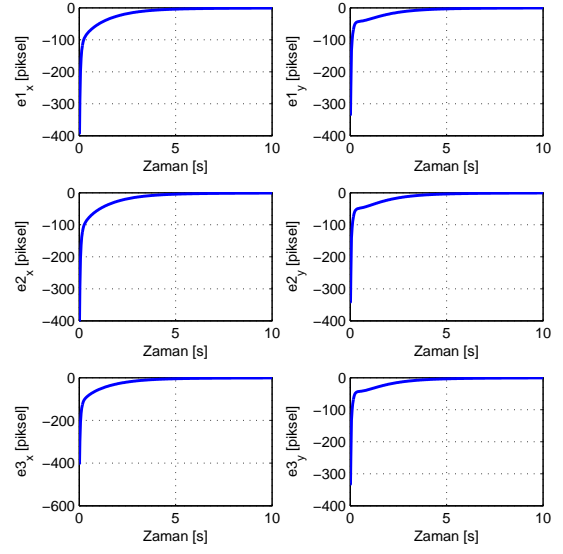


Şekil 3: Benzetimlerde kullanılan altı serbestlik dereceli Puma 560 robot

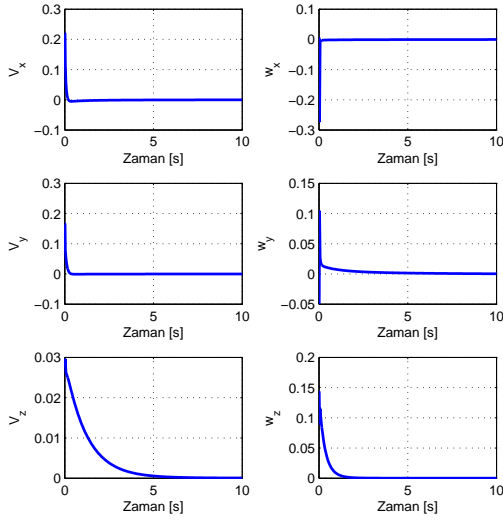
imgesinden elde edilen dış hatların ve kullanılan öznitelik noktalarının imge düzlemindeki hareketi Şekil 4'de gösterilmiştir. Bu benzetimde elde edilen kontrol sinyalleri ve özniteliklere ait piksel hataları sırasıyla Şekil 5 ve 6'da verilmektedir. Görüldüğü gibi sunduğumuz yöntem 6 serbestlik dereceli denetim uygulamalarında oldukça başarılı çalışmaktadır.



Şekil 4: Altı serbestlik dereceli robot üzerinde yapılan benzetimde hedef nesneye ait görüntünün imge düzlemindeki hareketi



Şekil 6: Benzetimdeki piksel hataları



Şekil 5: Benzetimdeki denetim sinyalleri

## 5. Deneysel Sonuçlar

Önerilen yöntemin deneysel sonuçları bu bölümde verilmiştir. Deneyler, iki serbestlik dereceli doğrudan tahrikli SCARA robot ile Fire-i400 dijital kamera ile yapılmıştır. Düzlemsel serbest şekilli bir cisim robot eline yerleştirilmiştir. Kamera, imge düzlemi ile eğrinin bulunduğu düzlem paralel olarak robota üstten bakacak şekilde sabitlenmiştir (Şekil 7). Robot dSPACE 1102 kartı ile kontrol edilmektedir. Kartın programlama dili Visual C'dir. Deneylerde nesnenin sınırları Canny kenar belirleme yöntemi ile çıkarılmıştır [16]. Çıkarılan bu kenarlardan, eğri algoritması kullanılarak dördüncü dereceden örtük bir polinom elde edilmektedir [7]. Bu örtük eğri bölüm 2'de anlatıldığı gibi ayrıştırılmıştır. İlk iki kompleks eşlenik doğru çiftinin



Şekil 7: Deney düzeneği

kesişiminden iki adet kesişim noktası elde edilmiştir. Ardından bu noktalar görsel geri beslemeli denetimde nokta öznitelikleri olarak kullanılmıştır.

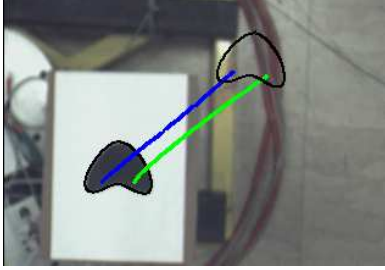
Denetim döngüsü iç ve dış olmak üzere iki döngüden oluşmaktadır. Dış döngü görüntü sistemi verileri ile çalışmaktadır. Bu döngü söz konusu noktaların piksel hatalarını kullanarak hız referansları üretmektedir. Bu referanslar ise içteki robot pozisyon döngüsüne beslenmektedir. İç denetim döngüsünün örnekleme zamanı 1 ms'dir. Kameranın görüntü alma hızı ise 30 fps'dir. Diyagonal kazanım matrisi olan

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (14)$$

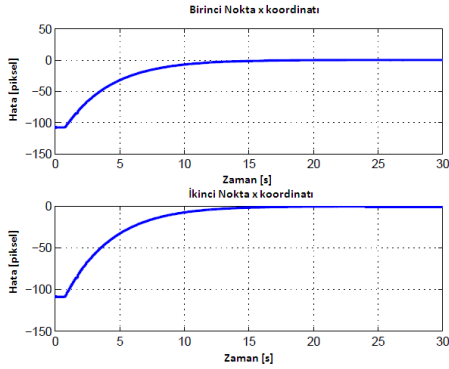
robot elinin hız vektörünü hesaplamada kullanılmıştır. Kalibrasyon sonuçlarına göre,  $x$  ve  $y$  yönlerindeki efektif odak uzaklıkları  $f_x = f_y = 970$  piksel/mm ve imge merkez noktası  $(x_c, y_c) = (160, 120)$  olarak belirlenmiştir.



Şekil 8: Referans ve başlangıç pozisyonları

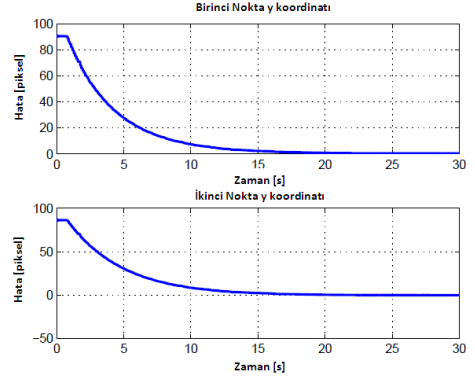


Şekil 9: Kompleks doğruların kesişim noktalarının izlediği yollar

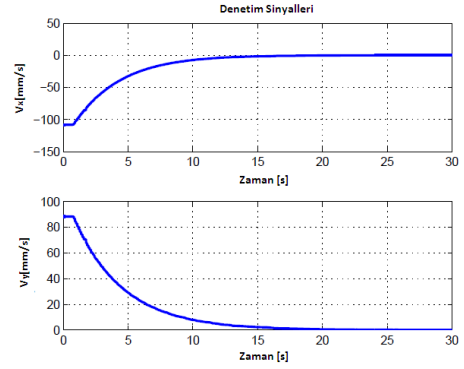


Şekil 10: İmge düzleminin x yönündeki piksel hataları

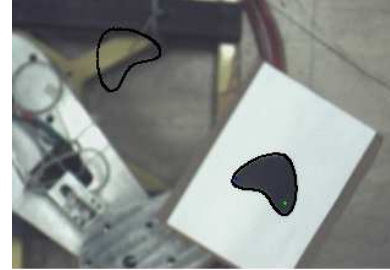
Bu bölümde iki deney sunulmaktadır. İlk deneyde referans ile başlangıç pozisyonu arasında büyük bir öteleme ve küçük bir dönme olduğu durum analiz edilmiştir. Referans ve başlangıç pozisyonları Şekil 8'de görüldüğü gibidir. Öznitelik noktalarının referansa giderken izledikleri yollar Şekil 9'da verilmiştir. Noktalarının  $x$  ve  $y$  yönündeki piksel hataları Şekil 10 ve 11'de verilmiştir. Denetim sinyalleri Şekil 12'de sunulmaktadır. Bir pikselden az kararlı hal hatası gözlemlenmiştir. İkinci deney referans ile başlangıç pozisyonu arasında büyük dönme ve ötelenme olduğu durumdur. Referans ve başlangıç pozisyonları Şekil 13'de verilmiştir. Kullanılan kesişim noktalarının referansa giderken izledikleri yollar ise Şekil 14'te sunulmaktadır. Bu deneyin hata grafikleri Şekil 15 ve 16'da verilmiştir. Denetim sinyalleri ise Şekil 17'de sunulmaktadır. İki piksel'den az bir kararlı hal hatası gözlemlenmiştir.



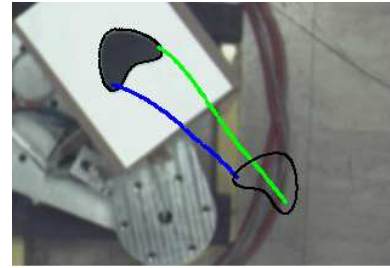
Şekil 11: İmge düzleminin y yönündeki piksel hataları



Şekil 12: Denetim Sinyalleri



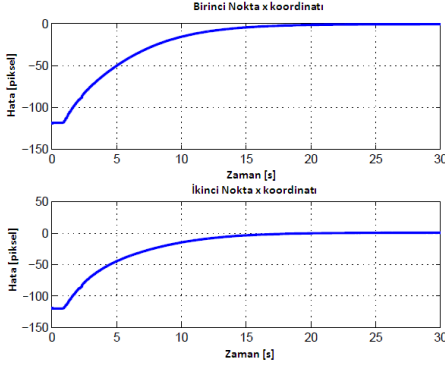
Şekil 13: Referans ve başlangıç pozisyonları



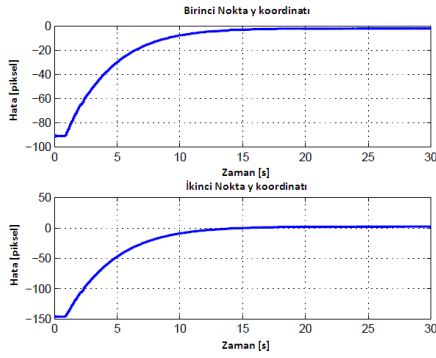
Şekil 14: Kompleks doğruların kesişim noktalarının referansa giderken izledikleri yollar

## 6. Sonuçlar ve Gelecek Çalışmalar

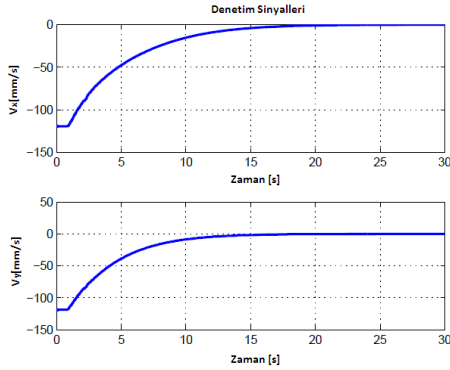
Bu bildiride görsel geri beslemeli robot denetiminde eğrilerin imge öznitelikleri olarak kullanılmasının yeni bir yöntemi sunulmuştur.  $n$ 'inci dereceden örtük polinomlar nesnenin



Şekil 15: İmge düzleminin x yönündeki piksel hataları



Şekil 16: İmge düzleminin y yönündeki piksel hataları



Şekil 17: Denetim Sinyalleri

sınırlarına oturtulmuş ve doğru çarpanlarına ayrılmıştır. Bu doğruların kesişimi reel noktalardır ve görsel geri beslemeli denetimde kullanılmıştır. Yöntemin 6 serbestlik dereceli uygulamalardaki performansı benzetim sonuçları ile gösterilmiş ve iki serbestlik dereceli SCARA robot üzerinde başarılı deneysel sonuçlar elde edilmiştir.

Bu bildiride sunulan yöntem örtük yapıdaki kapalı eğrilere ait, bir takım özel noktaları (kesişim noktaları) kullanan nokta Jakobyana dayanan bir yaklaşımdır. Ayrıştırılmadan elde edilen doğruların parametrelerini kullanarak elde edilen Jakobyaları önümüzdeki çalışmalarda kullanmayı planlıyoruz.

## 7. Kaynakça

- [1] G. D. Hager, "A modular system for robust positioning using feedback from stereo vision", *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, Vol. 13, No. 4, pp. 582-595, 1997.
- [2] S. Hutchinson, G. D. Hager and P. I. Corke, "A tutorial on visual servo control", *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, Vol. 12, No. 5, pp. 651-670, 1996.
- [3] F. Chaumette, S. Hutchinson, "Visual Servo Control, Part I: Basic Approaches and Part II: Advanced Approaches", *IEEE Robotics and Automation Magazine*, Vol. 13, No. 4, pp. 82-90, 2006.
- [4] B. Espiau, F. Chaumette, P. Rives, "A New Approach to Visual Servoing in Robotics", *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, Vol. 8, No. 3, pp. 313-326, 1992.
- [5] O. Tahri, F. Chaumette, "Point Based and Region Based Image Moments for Visual Servoing of Planar Objects", *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, Vol. 21, No. 6, pp. 1116-1127, 2005.
- [6] M. M. Blane, Z. Lei, H. Civi and D. B. Cooper, "The 3L Algorithm for Fitting Implicit Polynomial Curves and Surfaces to Data", *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 22, No. 3, pp. 298-313, 2000.
- [7] T. Sahin, M. Unel, "Globally Stabilized 3L Curve Fitting", *Lecture Notes in Computer Science (LNCS-3211)*, pp. 495-502, Springer-Verlag, 2004.
- [8] M. Unel, W.A. Wolovich, "On the construction of complete sets of geometric invariants for algebraic curves," *Advanced Applied Mathematics*, Vol. 24, No. 1, January 2000.
- [9] G. Taubin, D. B. Cooper, "2D and 3D object recognition and positioning with algebraic invariants and covariants," Chapter 6 of *Symbolic and Numerical Computation for Artificial Intelligence*, Academic Press, 1992.
- [10] J. Bloomenthal, "Introduction to implicit surfaces," Kaufmann, Los Altos, CA, 1997.
- [11] C.G. Gibson, "Elementary geometry of algebraic curves", Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1998.
- [12] D. Keren, C. Gotsman, "Fitting curves and surfaces to data using constrained implicit polynomials," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 23, No. 1, January 1999.
- [13] M. Unel, W. A. Wolovich, "On the construction of complete sets of geometric invariants for algebraic curves," *Advances in Applied Mathematics*, Vol.24, No.1, pp. 65-87, 2000.
- [14] M. Unel, "Polynomial decompositions for shape modeling, object recognition and alignment," Ph.D. Thesis, Brown University, Providence, 1999.
- [15] P. I. Corke, "A Robotics Toolbox for MATLAB," *IEEE Robotics and Automation Magazine*, Vol.3, No.1, pp. 24-32, 1996.
- [16] J. F. Canny, "A computational approach to edge detection," *IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence*, Vol. 8, No.6, pp. 679-698, 1986.