

Seyreklik Güdümlü SAR Görüntü Geriatımı için Düşük Sıralı Seyrek Matris Ayrışımı Sparsity-driven SAR Image Reconstruction via Low-rank Sparse Matrix Decomposition

Abdurrahim Soğanlı, Müjdat etin
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Sabancı niversitesi
{soganli,mcetin}@sabanciuniv.edu

Özetçe —Bu çalışmada sentetik açıklıklı radar (SAR) görüntüsünü seyrek ve düşük sıralı bileşenlerine ayıran bir geriçatma yöntemi öneriyoruz. Bu ayırma yöntemi bölütleme ve arkaplan çıkarımı gibi birçok görüntü yorumlama yöntemlerinde ilgi çekmektedir. Geleneksel olarak bu görüntü yorumlama yöntemleri SAR görüntüsünün oluşturulmasından sonra yapılır; ancak bu görüntüler yorumlama hedeflerinin görüntü oluşturma problemine dhil edilmediğinden dolayı yorumlama için uygun olmayabilir. Biz yeni bir çalışma olan seyrek ve düşük sıralı matrislerin ayrıştırılması yöntemini SAR görüntüleme işleminde kullanıyoruz. Sonuç olarak SAR görüntüsünü geriatarken aynı zamanda görüntüdeki seyrek bileşenleri ve düşük sıralı arkaplanı da ayırmaktayız. Önerdiğimiz yöntemin etkisini sentetik ve gerçek SAR görüntülerinde gösteriyoruz.

Anahtar Kelimeler—*sentetik açıklıklı radar; düşük sıralı seyrek matris ayrışımı; imge geri atılması.*

Abstract—We consider the development of a synthetic aperture radar (SAR) image reconstruction method that decomposes the imaged field into a sparse and a low-rank component. Such a decomposition is of interest in image analysis tasks such as segmentation and background subtraction. Conventionally, such operations are performed after SAR image formation. However image formation methods may produce images that are not well suited for such interpretation tasks since they do not incorporate interpretation objectives to the SAR imaging problem. We exploit recent work on sparse and low-rank decomposition of matrices and incorporate such a decomposition into the process of SAR image formation. The outcome is a method that jointly reconstructs a SAR image and decomposes the formed image into its low-rank background and spatially sparse components. We demonstrate the effectiveness of the proposed method on both synthetic and real SAR images.

Keywords—*synthetic aperture radar; low-rank sparse decomposition; image reconstruction.*

I. GİRİŐ

Görüntü ya da sinyalin bileşenlerine ayrıştırılması; görüntü çıkarımı, grlt temizleme ve bltleme gibi birok görüntü analiz probleminde kullanılmaktadır [11]. Bu yöntemler, sonraki analiz aşamalarının daha iyi yapılabilmesi için kullanılır. Bundan dolayı ayrışımın doğruluğu bu tip analiz ve karar

verme hedeflerinin performansını da etkilemektedir. Seyrek nesnelerin ve sahnenin arka planının ayrıştırılması bu uygulamalar için örnek bir problemdir. Son zamanlarda, arkaplanın düşük sıralı bir matris olarak varsayıldığı ayrıştırma problemi ilgi görmektedir. Son yapılan çalışmalar göstermiştir ki çok hafif koşullar altında bile bozuk ya da kısmi gözlemlerden düşük sıralı ve seyrek bileşenlerin ayrıştırılmasının (DSSA) yapılması mümkün olmaktadır [5]. DSSA yöntemi yüz tanıma ve arkaplan çıkarımı ve medikal görüntü geriatımında kullanılmıştır [1].

Sentetik açıklıklı radar (SAR) görüntüleme uygulamaları da nesne tanıma ve takibi gibi yukarıda bahsedilen yorumlama hedeflerini içermektedir. Bu açıdan SAR verisinden görüntü oluşturma önemli bir durum haline gelmektedir. Genellikle SAR görüntü oluşturma ve görüntü analizi ayrışık bir şekilde yapılmaktadır. Yorumlama yöntemleri görüntü oluşturulduktan sonra uygulanmaktadır. Hali hazırdaki SAR sistemleri görüntü oluşturma işlemini Fourier dönüşümü tabanlı algoritmalar ile yapmaktadır. [2], [13]. Bu sadece veri güdümlü olan geleneksel yöntemler basit ve etkili olmalarına rağmen SAR sistemlerinin sınırlı bant genişliğinden dolayı beneklilik, yan kulak gibi yapay olgulara maruz kalmaktadırlar. Bu tip yapay olgular sonraki yorumlama görevleri için sorun oluşurmaktadır. Son yıllarda geleneksel yöntemlerin bu kusurlarını düzeltmek için SAR görüntüleme problemine seyrekliğin önsel bilgi olarak eklendiği görülmektedir [3], [4]. Bu seyreklik güdümlü yöntemler, sahne yansıtırlıklarının belli tanım bölgelerinde seyrek olduğunu varsaymaktadırlar ve geleneksel yöntemlere göre daha başarılı görüntü geriçatımı yaptıkları grlmştir. Analiz tabanlı yöntemlerden biri olan [3] görüntüdeki noktasal ve bölgesel yapıları iyileştirmeye çalışırken, sentez tabanlı yöntemler [4] sahne yansıtırlığını seyreklik szluğu ile temsil ederek görüntü geriçatımı yapmaktadır. Ancak; iki yöntem de sahnenin n tanımlı özelliklerini iyileştirmektedir ve sahnedeki ilerideki yorumlama görevleri için kullanışlı olabilecek örüntüleri bastırabilirler. Bu açıdan bu yöntemler de görüntü oluştururken ilerideki yorumlama aşamalarının amaçlarını dikkate almadığı için uygun olmayan görüntü oluşturabilirler.

İleri seviyedeki yorumlama hedeflerine uygun SAR görüntüleri yorumlama amaçları hakkındaki bilginin SAR görüntüleme problemine eklenmesiyle oluşturulabilir. Bu alışmada DSSA erevesini SAR görüntüleme problemine ekliyoruz. Önerilen yöntemin iki önemli avantajı vardır. İlk olarak SAR

sahnesinin seyrek bileşenleri ve düşük sıralı arkapları SAR görüntüsü geri çatılırken ayrıştırılmaktadır. Bu açıdan önerilen yöntem SAR uygulamaları için bileşik görüntünün yanında iki ek görüntü de sunmaktadır: sahnedeki seyrek nesnelere oluşan bir seyrek görüntü ve düşük sıralı bir arkaplan görüntüsü. İkinci olarak önerilen yöntem seyrek nesnelere bölütlenmesi ya da arkaplan çıkarımı gibi yorumlama görevlerini geriçatım işlemi sırasında yapabilmektedir.

II. ARKAPLAN

A. SAR Gözlem Modeli

SAR görüntü problemi geri saçılan gözlemlerden sahnenin geri çatıldığı tipik bir ters problemdir. Noktasal ışık kipindeki SAR sisteminde bütün açıklıklardaki dönüş sinyalleri radar sensörü tarafından toplanır. Birkaç önışlem aşamasından sonra karmaşık sahne $f(x, y)$ ve açıklık açısı θ arasındaki ilişki

$$r_\theta(t) = \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} f(x, y) e^{-jK(t)(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy \quad (1)$$

olarak ifade edilebilir. Burada r yansıtırlık sahnenin yarıçapı, $K(t)$ ise uzamsal frekanstır. Bu dönüş sinyalleri sahnenin θ açısına göre Fourier dönüşümünde sınırlı bir dilime karşılık gelmektedir. Dönüş sinyalleri ve sahne örnekleri bir vektör olarak ifade edildiğinde bu problem şu hale gelmektedir.

$$g = Hf + n \quad (2)$$

Burada n gürültüyü, H ise (1)'deki gözlem modelini temsil etmektedir.

B. Düşük Sıralı Seyrek Matris Ayrışımı (DSSA)

Bir A matrisini düşük sıralı D ve seyrek S bileşenlerine ayırmak son zamanlarda ilgi odağı olmuştur. Görüntü işleme problemi için bu durum bir görüntünün noktasal baskın nesnelere oluşan seyrek bir görüntü ve düşük sıralı bir matris olarak temsil edilebilecek bir arkaplanına ayrıştırılması olarak düşünülebilir. DSSA problemi şu şekilde ifade edilmektedir.

$$\min_{D, S} \text{rank}(D) + \lambda \|S\|_0 \quad \text{s.t.} \quad A = D + S \quad (3)$$

Burada λ iki terimi dengeleyen bir parametredir. Bu problem NP-zordur ve sıfırdan farklı tekil değerlerin küçültülmesini içermektedir. Yakın çalışmalar göstermektedir ki [5], [6] nükleer norm

$$\|F\|_* = \sum_{i=1}^r \sigma_i(F) \quad (4)$$

bazı koşullar altında sıra küçültme kısıtının yerine dışbükey bir kısıt olarak kullanılabilir. Dışbükey DSSA problemi şöyle ifade edilebilir:

$$\min_{D, S} \|D\|_* + \lambda \|S\|_1 \quad \text{s.t.} \quad A = D + S \quad (5)$$

Bu problemin arttırılmış Lagrange halinin çözümü için birçok yöntem önerilmiştir [7], [8].

III. ÖNERİLEN YÖNTEM

SAR geriçatımı için DSSA çerçevesini kullanabilmek için vektör olarak temsil edilen $f \in \mathbb{C}^N$ in matrise dönüştürülmesi gerekmektedir. Bu vektörün $\sqrt{N} \times \sqrt{N}$ boyutundaki görüntü karşılığı doğrudan kullanılabilir fakat SAR görüntüsünün tamamına düşük sıralı bir varsayım yapmak gerçekçi olmayacaktır. Bu yüzden parça tabanlı bir yöntem kullanılmaktadır. R bir görüntünün parça-tabanlı matrisini oluşturan bir lineer operatör olsun. Kayan pencere kullanılarak görüntü parçaları $f_i \in \mathbb{C}^{\sqrt{n} \times \sqrt{n}}$ elde edilmektedir. Parça-tabanlı matris $F \in \mathbb{C}^{n \times K}$ şu yapıdadır.

$$F = \begin{bmatrix} | & | & & & | \\ f_1 & f_2 & \dots & \dots & f_K \\ | & | & & & | \end{bmatrix} \quad (6)$$

Burada K kayma mesafesi ve pencerenin boyutuna bağlıdır. Bu matris R^* operatörü ile görüntü haline geri döndürülebilmektedir. Bu yöntem küçük nesne algılamada kullanılmıştır [9]. Öte yandan karmaşık olan SAR yansıtırlıkları genellikle rastgele faz içermektedir ki bu durum geri çatım işleminde dikkate alınması gereken bir durumdur. Bu bakımdan görüntünün mutlak değerini $F = R(|f|)$ olarak temsil ediyoruz. Seyreklik ve düşük sıralı arkaplan matrislerini S ve B olarak ifade ettiğimizde gözlem modelimiz:

$$g = H\Theta R^*(B + S) + n \quad (7)$$

olmaktadır. Köşegen matris Θ karmaşık görüntünün üslü fazını içermektedir. DSSA tabanlı SAR görüntü problemi şu şekilde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} \hat{B}, \hat{S}, \hat{\Theta} = \arg \min_{B, S, \Theta} & \|g - H\Theta R^*(B + S)\|_2^2 + \lambda_b \|B\|_* + \lambda_s \|S\|_1 \\ \text{s.t.} & |\Theta_{(i,i)}| = 1 \quad \forall i \end{aligned} \quad (8)$$

Burada λ_b ve λ_s düzenleme parametreleridir. İlk terim veri terimidir. İkinci ve üçüncü terimler sırasıyla matrisin düşük sıralı ve seyrek olmasını zorlamaktadır. Veri teriminden dolayı bu problemi şu andaki DSSA yöntemleri ile doğrudan çözebilmek mümkün olmamaktadır. Bu yüzden $F = \hat{B} + S$ olan bir F değişkeni tanımlıyoruz ve problemi arttırılmış Lagrange haline çeviriyoruz.

$$\begin{aligned} L(F, B, S, \Theta, Z) = & \|g - H\Theta R^*(F)\|_2^2 + \lambda_b \|B\|_* + \lambda_s \|S\|_1 \\ & + \langle Z, F - B - S \rangle + \frac{\beta}{2} \|F - B - S\|_F^2 \\ \text{s.t.} & |\Theta_{(i,i)}| = 1 \quad \forall i \end{aligned} \quad (9)$$

Burada Z Lagrange katsayısı, $\beta > 0$ ise kısıtın ihlalini cezalandırmaktadır. Bu problemi değişmeli yön çarpanları yöntemi kullanarak çözüyoruz [10]. Problemi diğer değişkenleri sabit tutarak bir değişken üzerinden enküçültüyoruz.

IV. OPTİMİZASYON PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Problemin çözümü için 5 farklı değişken bulunmakta: F, B, S, Z, Θ .

Seyrek Matris $S^{(k+1)}$ 'in Çözümü

Diğer sabit varsayılan değişkenlerden oluşan terimler çikartıldığında altproblem

$$\begin{aligned} S^{(k+1)} = \arg \min_S & \lambda_s \|S\|_1 + \left\langle Z^{(k)}, F^{(k)} - B^{(k)} - S \right\rangle \\ & + \frac{\beta}{2} \|F^{(k)} - B^{(k)} - S\|_F^2 \end{aligned} \quad (10)$$

halini almaktadır ki bu çok bilinen LASSO problemine denktir ve yumuşak eşikleme ile çözülebilir. Yumuşak eşikleme operatörü şu şekildedir.

$$\tilde{C}_\epsilon(S) = \begin{cases} S - \epsilon & \text{eğer } S > \epsilon \\ S + \epsilon & \text{eğer } S < -\epsilon \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (11)$$

Problemın çözümü $S^{(k+1)} = \tilde{C}_{\frac{\lambda_b}{\beta}}(F^{(k)} - B^{(k)} + \frac{Z^{(k)}}{\beta})$ olarak ifade edilebilir.

Düşük Sıralı Matris $B^{(k+1)}$ 'in Çözümü

Altproblem şu şekildedir.

$$B^{(k+1)} = \arg \min_B \lambda_b \|B\|_* + \left\langle Z^{(k)}, F^{(k)} - S^{(k+1)} - B \right\rangle + \frac{\beta}{2} \|F^{(k)} - S^{(k+1)} - B\|_F^2 \quad (12)$$

Bu problem nükleer norm enküçültülmesi problemidir ve tekil değer eşiklemesi ile çözülebilmektedir [14]. Bir diğer deyiş ile tekil değerlere yumuşak eşikleme uygulanmaktadır. Problemın çözümü şu şekildedir.

$$S^{(k+1)} = U_k \tilde{C}_{\frac{\lambda_b}{\beta}}(\Sigma_k) V_k^T \quad (13)$$

Burada $F^{(k)} - S^{(k+1)} + \frac{Z^{(k)}}{\beta}$ matrisinin tekil değer ayrışımı $U_k \Sigma_k V_k^T$ 'dir. Bu iki altproblem de nokta tabanlı işlemlerle çözülebilmektedir.

Parça tabanlı Matris $F^{(k+1)}$ 'in Çözümü

Bu değışkene ait altproblem

$$F^{(k+1)} = \arg \min_F \|g - H\Theta^{(k)}R^*(F)\|_2^2 + \left\langle Z^{(k)}, F - S^{(k+1)} - B^{(k+1)} \right\rangle + \frac{\beta}{2} \|F - S^{(k+1)} - B^{(k+1)}\|_F^2 \quad (14)$$

karesel bir problemdir ve analitik olarak çözülebilir. F değışkenine göre türev alınıp sifira eşitlendiğinde

$$\begin{aligned} & \left(2 \left(H\Theta^{(k)}R^* \right)^H \left(H\Theta^{(k)}R^* \right) + \beta I \right) F^{(k+1)} \\ & = \left(2 \left(H\Theta^{(k)}R^* \right)^H g + \beta \left(B^{(k+1)} + S^{(k+1)} \right) - Z^{(k)} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

eşitliğı problemın sonucunu vermektedir. Bu altproblem eşlenik gradyan yöntemi ile çözülebilir.

Faz Matrisi $\Theta^{(k+1)}$ 'in Çözümü

Bu problem için köşegen faz matrisi Θ 'nın elemanlarını p vektöründe temsil ettiğimizde

$$\hat{p} = \arg \min_p \left\| g - H\tilde{M}p \right\|_2^2 + \lambda_p \sum_{i=1}^N (|p_i| - 1)^2 \quad (16)$$

altproblemi oluşmakta. Burada \tilde{M} bir köşegen matristir ve $R^*(F^{(k+1)})$ 'nin elemanlarını içermektedir. Bu problem [4]'de önerildiğı gibi çözülebilir.

Lagrange Çarpanının Güncellenmesi

Lagrange çarpanı her yinelemede β adım boyu kullanılarak şu şekilde güncellenir.

$$Z^{(k+1)} = Z^{(k)} + \beta(F^{(k+1)} - B^{(k+1)} - S^{(k+1)}) \quad (17)$$

Görüntüleme problemine ait bu tekrarlı adımlar yaklaşım kriteri $\frac{\|F^{(k+1)} - F^{(k)}\|_F}{\|F^{(k)}\|_F} < \delta_x$ sağlanana kadar devam eder.

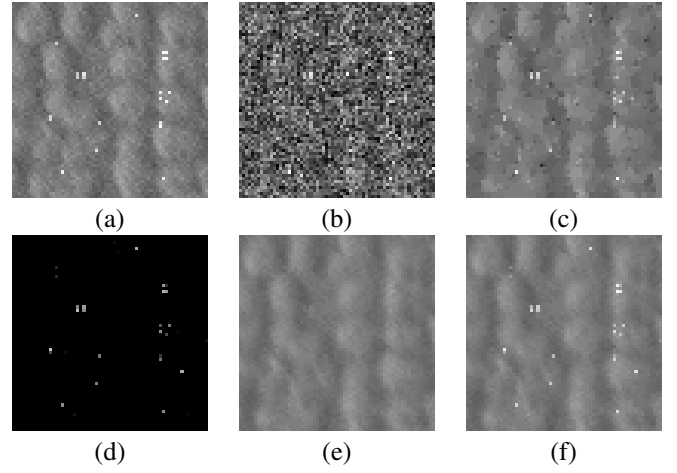


Figure 1: Sentetik deney sonucu $L = 0.71$ (a) Referans görüntü. (b) Geleneksel geriçatım MSE = 0.0310. (c) Analiz tabanlı seyreklik güdümlü geriçatım MSE = 0.0015. (d) Önerilen yöntem ile oluşturulmuş seyrek parça. (e) Önerilen yöntem ile oluşturulmuş düşük sıralı parça. (f) Bileşik görüntü MSE = 0.0008.

V. DENEYSSEL SONUÇLAR

Önerilen yöntemin performansını ölçen sentetik ve TerraSAR-X [15] veri kümesinden elde edilen gerçek SAR sahnelerine ait deneyleri sunmaktayız. Deneylerde gözlem modeli H olarak bant-sınırlı Fourier dönüşümü kullanıldı. Elde edilen görüntünün seyrek, düşük sıralı bileşenleri ile beraber bileşik sonuç da gösterilmektedir. Önerilen yöntemi geleneksel yöntem ve analiz-tabanlı yöntem ile karşılaştırdık.

Sentetik sahne deneyi için 64×64 boyutunda seyrek ve düşük sıralı arkaplan görüntülerini oluşturup birleştirdik (Şekil 1(a)). Bileşik görüntü insan yapımı birkaç nesne ve doğal bir araziden oluşan bir sahneye olarak düşünülebilir. Görüntüye rastgele faz eklendikten sonra bant-sınırlı H modeli kullanılarak SAR verisi oluşturulmuştur. Bu veriden düşük sıralı arkaplan ve seyrek parçalarla birlikte bileşik görüntüyü geriçatmayı amaçlıyoruz. Gözlenmiş veri oranı $L = 0.71$ için deney sonuçları Şekil 1'de gösterilmiştir. Gözlenmiş veri oranı elde edilen veri örneklerinin sahnenin en yüksek bant-taki durumdaki örnek sayısına oranıdır. Önerdiğimiz yöntem diğer yöntemlere oranla başarılı sonuçlar oluşturmaktadır. Önerilen yöntem, ortalama karesel yanlgı (MSE) kullanılarak sayısal olarak diğer yöntemlerle karşılaştırılmıştır. Ayrıca ilerideki yorumlama işlemleri için başarılı bir şekilde seyrek ve düşük sıralı parçaları da oluşturmaktadır. Örneğin yorumlama görevinin seyrek nesnelere tanımlanması olduğu durumda seyrek parça kullanılabilir. Analiz tabanlı yöntem geleneksel yöntemle göre iyi bir sonuç oluşturmaya rağmen arkaplanda yapay olgulara sebep olmaktadır.

İkinci olarak TerraSAR-X veri kümesinden elde edilen SAR sahnesine ait deney sonuçlarını gösteriyoruz. SAR verisi 3.75 m derinlik ve 3.69 m çapraz derinlik çözünürlüğündedir. SAR görüntü boyutu 128×128 olarak seçilmiştir. Test görüntüsü Toronto bölgesine ait küçük ev ve yollardan oluşmaktadır (Şekil. 2(a)). Bu küçük yapılar benzerlik gösterdiği için sahnenin parça tabanlı matris görüntüsü düşük sıralı bir arkaplan ve seyrek parçalardan oluşan bir yapı olarak nitelendirilebilir.

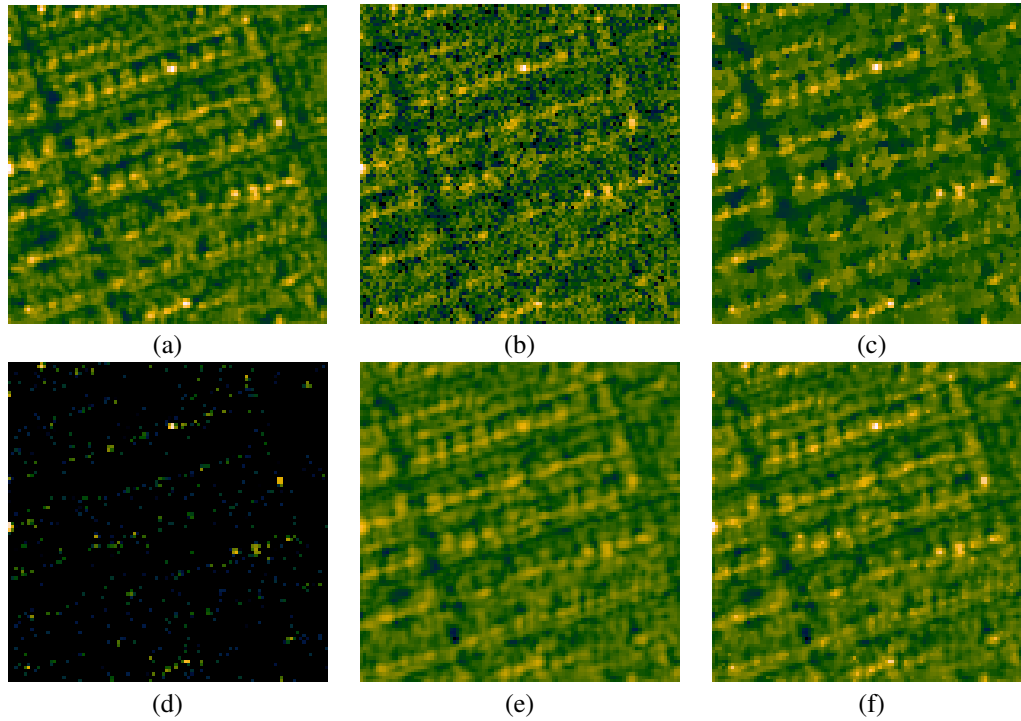


Figure 2: Gerçek SAR sahnesi sonucu $L = 0.77$. (a) Geleneksel yöntemle geriçatılmış referans görüntüsü $L = 1$. (b) Geleneksel geriçatım. (c) Analiz tabanlı seyreklik güdümlü geriçatım. (d) Önerilen yöntem ile oluşturulmuş seyrek parça. (e) Önerilen yöntem ile oluşturulmuş düşük sıralı parça. (f) Önerilen yöntemle oluşturulmuş bileşik görüntü.

Bu deney için gözlenen veri oranı $L = 0.77$ olarak seçilmiştir. Geriçatım sonuçları Şekil 2’de gösterilmektedir. Önerilen yöntem seyrek parçaları seyrek görüntüde oluştururken düşük sıralı yapıları da düşük sıralı görüntüde muhafaza edebilmektedir. Diğer iki yöntem ile karşılaştırıldığında önerilen yöntemin sahnenin detaylarını daha iyi bir şekilde oluşturduğu görülmektedir.

VI. VARGILAR

Bu çalışmada SAR görüntü oluşturma için düşük sıralı ve seyrek parçaların ayrışımına dayalı bir yöntem öneriyoruz. Birçok SAR imgelerine dair görüntüleme uygulamalarında daha iyi yorumlama için arkaplan çıkarımı ve bölütleme kullanılmaktadır. Bu yüzden arkaplan ve seyrek bölgeleri SAR imgesinin geriçatımı esnasında ayıran bir geriçatım yöntemi öneriyoruz. Önerilen yöntemin diğer yöntemlere göre başarılı geriçatım sonuçları ürettiğini göstermekteyiz. Ayrıca arkaplan ve seyrek parçaların ayrışımı ilerideki SAR görüntü analizlerini de kolaylaştırabilmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] S. Lingala, Y. Hu, E. DiBella, and M. Jacob, “Accelerated dynamic MRI exploiting sparsity and low-rank structure: k-t SLR,” *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 30, no. 5, pp. 1042–1054, May 2011.
- [2] D. C. Munson, Jr., J. D. O’Brien, and W. K. Jenkins, “A tomographic formulation of spotlight-mode synthetic aperture radar,” *Proc. IEEE*, vol. PROC-71, pp. 917–925, 1983.
- [3] M. Çetin and W. C. Karl, “Feature-enhanced synthetic aperture radar image formation based on nonquadratic regularization,” *IEEE Trans. Image Processing*, pp. 623–631, 2001.
- [4] S. Samadi, M. Cetin, and M. Masnadi-Shirazi, “Sparse representation-based synthetic aperture radar imaging,” *IET Radar, Sonar and Navigation*, vol. 5, no. 2, pp. 182–193, 2011.
- [5] E. Candès and B. Recht, “Exact matrix completion via convex optimization,” *Foundations of Computational Mathematics*, vol. 9, no. 6, pp. 717–772, 2009.
- [6] B. Recht, M. Fazel, and P. Parrilo, “Guaranteed minimum-rank solutions of linear matrix equations via nuclear norm minimization,” *SIAM Review*, vol. 52, no. 3, pp. 471–501, 2010.
- [7] Z. Lin, M. Chen, and Y. Ma, “The Augmented Lagrange Multiplier Method for Exact Recovery of Corrupted Low-Rank Matrices,” *ArXiv e-prints*, Sep. 2010.
- [8] J. X. Yuan, “Sparse and Low-Rank Matrix Decomposition Via Alternating Direction Methods,” *Optimization Online*, 2009.
- [9] C. Gao, D. Meng, Y. Yang, Y. Wang, X. Zhou, and A. Hauptmann, “Infrared patch-image model for small target detection in a single image,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 22, no. 12, pp. 4996–5009, Dec 2013.
- [10] S. Boyd, N. Parikh, E. Chu, B. Peleato, and J. Eckstein, “Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers,” *Found. Trends Mach. Learn.*, vol. 3, no. 1, pp. 1–122, Jan. 2011.
- [11] J.-L. Starck, M. Elad, D.L. Donoho, “Image decomposition via the combination of sparse representations and a variational approach,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol.14, no.10, pp.1570,1582, Oct. 2005.
- [12] E. J. Candès, X. Li, Y. Ma, and J. Wright, “Robust principal component analysis?” *J. ACM*, vol. 58, no. 3, pp. 11:1–11:37, Jun. 2011.
- [13] W. Carrara, R. Majewski, and R. Goodman, *Spotlight Synthetic Aperture Radar: Signal Processing Algorithms*. Artech House, 1995.
- [14] J.-F. Cai, E. J. Candès, and Z. Shen, “A Singular Value Thresholding Algorithm for Matrix Completion,” *ArXiv e-prints*, Oct. 2008.
- [15] Astrium TerraSAR-X sample imagery. [Online]. Available: <http://www.astriumgeo.com/en/23-sample-imagery>